13/12/2016

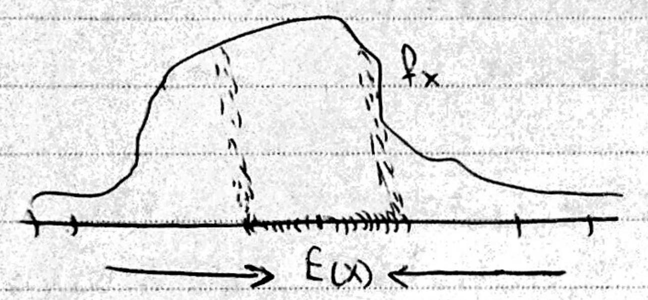
Μάθημα 19ο
Πιθανότητες.

Ροπές τ.μ. και Κατανομές - Ροπογεννήτρια

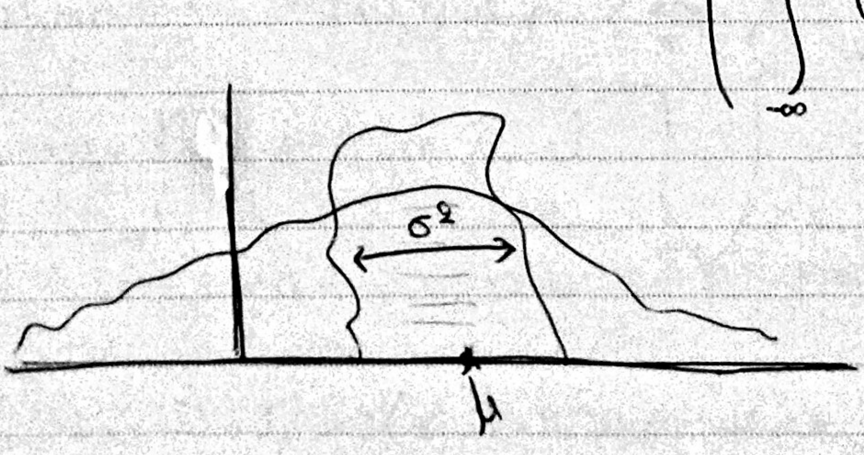
Επανάληψη

τ.μ. X

$$\mu = E(x) = \begin{cases} \sum_x x \cdot p_X(x) &, X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx &, X \text{ συνεχής} \end{cases}$$



$$\sigma^2 = Var(x) = E(X-\mu)^2 = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^2 p_X(x) &, X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx &, X: \text{συνεχής} \end{cases}$$



Τυπική Απόκλιση

$\sigma = +\sqrt{Var(x)}$

Ερμηνεία :

Ορισμός (Απλές Ροπές ή Ροπές περί του μηδέν)

Έστω τ.μ. X. Η k-τάξης απλή ροπή ή ροπή περί του μηδέν της X συμβολίζεται με μ_k και ορίζεται:

$$\mu_k \overset{\text{ορ.}}{=} E(X^k) = \begin{cases} \sum_x x^k p_X(x) & , X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx & , X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N} - \{0\}$

Παρατήρηση: Αν $k=1$ τότε $\mu_1 = \mu = E(X)$

Ορισμός (Κεντρικές Ροπές ή Ροπές περί τη μέση τιμή)

Έστω τ.μ. X με μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η k-τάξης κεντρική ροπή ή ροπή περί τη μέση τιμή της X συμβολίζεται με V_k και ορίζεται

$$V_k \overset{\text{ορ.}}{=} E(X-\mu)^k = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^k p_X(x) & , X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f_X(x)\,dx & , X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N} - \{0\}$

Παρατήρηση: Αν $k=2$ τότε $V_2 = Var(X)$

Πρόταση: Αν οι ροπές μιας τ.μ. X υπάρχουν, τότε:

$$V_k = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \mu_1^r \mu_{k-r} \quad , k=1,2,\ldots$$

Απόδειξη

$$V_k \overset{\text{ορ.}}{=} E(X-\mu)^k = E(-\mu+X)^k \xrightarrow[\text{Νεύτωνα}]{\text{Διώνυμο}} E\left\{\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-\mu)^r X^{k-r}\right\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(-\mu)^r E(X^{k-r})$$

Πρόταση: Έστω συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. f_X συμμετρική γύρω από το $\mu = E(X)$. Τότε, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι κεντρικές ροπές περιττής τάξης είναι όλες 0, δηλ:

$$V_k = 0 \quad , k = 2n+1 \quad , n \in \mathbb{N}$$

Συντελεστές Λοξότητας και Κύρτωσης

Ορισμός (Συντελεστής Λοξότητας)

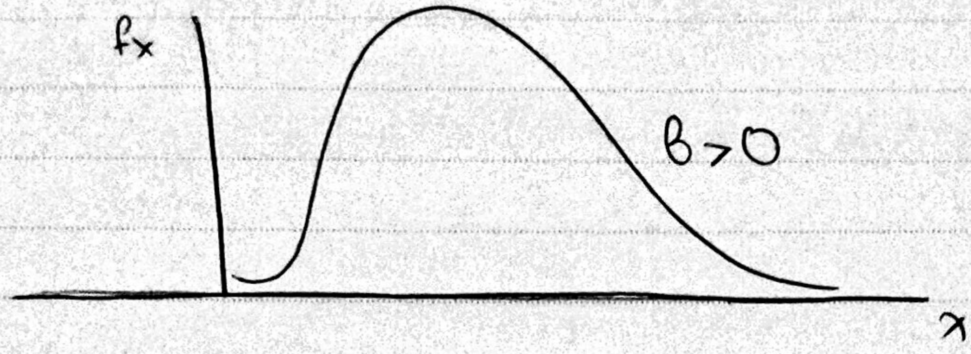
Έστω τ.μ. X. Ο συντελεστής λοξότητας συμβολίζεται με β και ορίζεται: $\beta = \dfrac{V_3}{\sigma^3}$, $\sigma = +\sqrt{Var(X)}$

Χαρακτηρισμοί του β

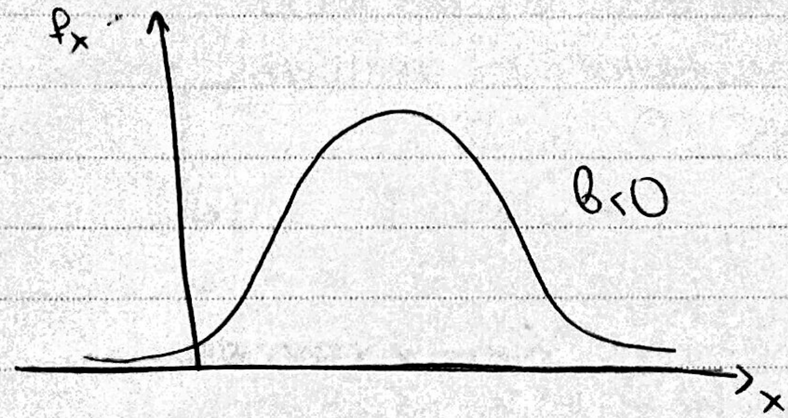
① Αν η X συνεχής με σπ.π. f_X και η f_X συμμετρική γύρω από το $\mu \implies \beta = 0$

Το αντίστροφο (δυστυχώς) δεν ισχύει.
Ισχύει όμως:
Αν $\beta \neq 0$ τότε η f_X δεν είναι συμμετρική.
(γιατί $A \Rightarrow B$ τότε $\sim B \Rightarrow \sim A$)

Αν $\beta > 0$ η f_x είναι λοξή δεξιά



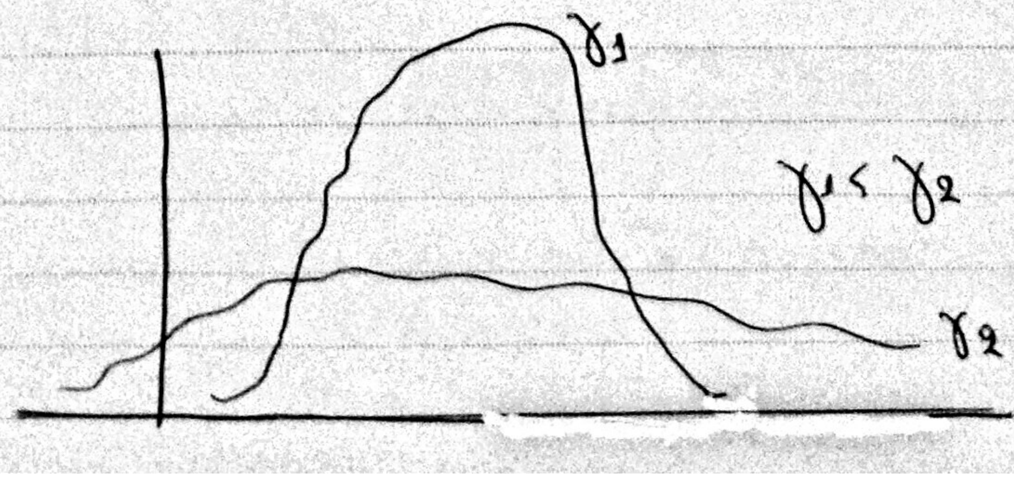
Αν $\beta < 0$ η f_x είναι λοξή αριστερά.



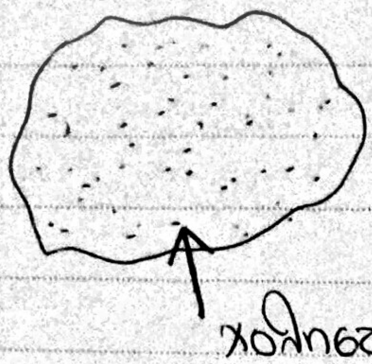
<u>Ορισμός (Συντελεστής Κύρτωσης)</u>

Έστω τ.μ. X. Ο συντελεστής κύρτωσης συμβολίζεται με γ και ορίζεται $\gamma = \dfrac{\nu_4}{\sigma^4}$, $\sigma = +\sqrt{Var(X)}$

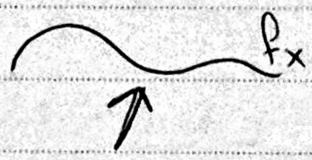
$\gamma \leftarrow$ πληροφορίες για τον βαθμό κύρτωσης της κατανομής ή για το βαθμό επιπεδότητας της κατανομής.

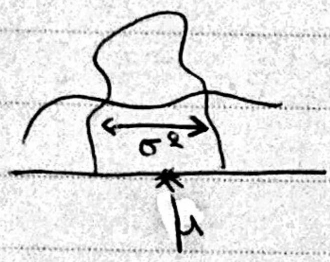


πληθυσμός



χοληστερίνη $\equiv X$ τ.μ.





$E(x)$, $Var(x)$

θ, γ

$$X \xrightarrow{n} \boxed{x_1, x_2, \ldots, x_n}$$

$\bar{x} \approx E(x)$

$s^2 \approx Var(x)$

Ροπογεννήτρια

Ορισμός: Έστω τ.μ. X. Η ροπογεννήτρια της X συμβολίζεται με $m_x(t)$ και ορίζεται:

$$m_x(t) \overset{\text{of}}{=} E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p_x(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_x(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες

① Η m_x υπάρχει αν το άθροισμα ή ολοκλήρωμα υπάρχουν για $t=0 \Rightarrow m_x(t)=1$ άρα στο $t=0$ η $m_x(t)\ \exists$

② Έστω X μια τμ. και $aX+\beta$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός της X.

$$m_{aX+\beta}(t) \overset{\text{ορ.}}{=} E\left(e^{t(aX+\beta)}\right) = E\left(e^{atX+\beta t}\right) =$$
$$= E\left(e^{\beta t}e^{atX}\right) = e^{\beta t}\,E\left(e^{atX}\right) =$$
$$= e^{\beta t}\,m_x(at)$$

Άρα: $m_{aX+\beta}(t) = e^{\beta t}\,m_x(at)\quad, t\in\mathbb{R}$

Ασκήσεις στις Ειδικές Διακριτές - Συνεχείς κατανομές 2016/2017

1. Μία εταιρεία διαθέτει τα προϊόντα της σε συσκευασίες των 10 τεμαχίων. Κάθε τεμάχιο έχει 1% πιθανότητα να είναι ελαττωματικό, ανεξάρτητα από το άλλο. Η εταιρεία δέχεται πίσω τις συσκευασίες που έχουν περισσότερα του ενός τεμάχια ελαττωματικά. Ποιο το ποσοστό των συσκευασιών που θα επιστραφούν;

2. Ο κύριος «Χ» ρίχνει ένα δίκαιο νόμισμα 5 φορές. Αν τα αποτελέσματα της ρίψης τους θεωρηθούν ανεξάρτητα, ποια η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Χ που παριστάνει τον αριθμό των φορών που θα εμφανιστεί «Κεφαλή»; Ποια η πιθανότητα να εμφανιστούν 3 «Κεφαλές»;

3. Σε ένα κατάστημα οι πελάτες εισέρχονται με ρυθμό 1 πελάτης ανά 2 λεπτά. Ποια η πιθανότητα: α) να μην εισέλθει πελάτης μεταξύ 12:00 και 12:05; β) να εισέλθουν τουλάχιστον 4 πελάτες στο διάστημα μεταξύ 11:00 και 11:08;

4. Ένας παίκτης εκλέγει 4 σφαίρες από ένα κουτί, στο οποίο περιέχονται 4 άσπρες και 4 μαύρες. Αν επιλέξει 2 άσπρες και 2 μαύρες σταματά. Σε διαφορετική περίπτωση επανατοποθετεί τις σφαίρες στο κουτί και επαναλαμβάνει τη διαδικασία. Ποια η πιθανότητα να σταματήσει μετά από n εκλογές;

5. Στο παιχνίδι της ρουλέτας κάποιος μπορεί να ποντάρει σε έναν ή περισσότερους από 38 αριθμούς, από τους οποίους κάθε φορά κληρώνεται ένας. Κάποιος παίκτης αποφασίζει να ποντάρει πάντα στους αριθμούς από το 1 έως το 12. Να βρεθεί α) η πιθανότητα να χάσει στις 5 πρώτες φορές που θα συμμετάσχει στο παιχνίδι β) να κερδίσει πρώτη φορά στην τέταρτη συμμετοχή του στο παιχνίδι.

6. Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον χρόνο σε λεπτά μιας τηλεφωνικής κλήσης από ένα καρτοτηλέφωνο. Υποθέτουμε ότι ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 0.1. Αν σε ένα καρτοτηλέφωνο κάποιος αρχίζει να μιλά ακριβώς την ώρα που φτάνουμε να βρεθεί η πιθανότητα να περιμένουμε α) περισσότερο από 10 λεπτά β) μεταξύ 10 και 20 λεπτών.

7. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαία μεταβλητής Χ που παριστάνει το χρόνο ζωής μιας ηλεκτρικής συσκευής σε έτη είναι

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{10}{x^2}, & \text{για } x>10, \\ 0\ , & \text{αλλού.} \end{cases}$$

α) Να υπολογιστεί η $P(X > 20)$. β) Να προσδιοριστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Χ και γ) να βρεθεί η πιθανότητα σε 6 τέτοιες συσκευές, τουλάχιστον 3 να δούλεψαν για τουλάχιστον 15 έτη. Ποιες οι υποθέσεις που πρέπει να γίνουν;

8. Το πλάτος ενός εξαρτήματος μίας μηχανής περιγράφεται από την κανονική κατανομή με μ=0,9 και σ=0,003. Τα εργοστασιακά όρια για να μην είναι ελαττωματικό είναι 0.9 ± 0.005. Ποια η πιθανότητα ένα εξάρτημα να είναι ελαττωματικό; Ποια η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του σ έτσι ώστε η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό να είναι το πολύ 1%;

9. Δύο περιπολικά βρίσκονται στα σημεία Α, Β της Εγνατίας οδού, που απέχουν μεταξύ τους 80 χιλιόμετρα. Αν συμβεί κάποιο περιστατικό μεταβαίνει στον τόπο αυτού το κοντινότερο περιπολικό. Ποια η πιθανότητα να χρειαστεί το περιπολικό να διανύσει περισσότερα από 30 χιλιόμετρα;

10. Ο αριθμός των απεργιών που γίνονται σε μία χώρα στη διάρκεια ενός χρόνου ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο 0,5. Ποια η πιθανότητα α) να μην συμβεί ούτε μία απεργία σε ένα χρόνο β) να συμβούν περισσότερες από δύο και γ) δεδομένου ότι έχει περάσει ένας χρόνος χωρίς απεργία να περάσουν ακόμη 6 μήνες.